

# 《周髀算经》从数学看先秦的天文观及地中问题



曹慧奇

(中国社会科学院考古研究所)

天文学是一门古老的科学，自有人类文明史以来，天文学就有重要的地位，也是我们研究古代社会人文思想的重要内容之一。天文学起源于古代人民对于季节测定的需求发展而来，对古代农业种植的时令起着主导作用。因此关于天体位置和天体到达某个位置时间的天体测量成为构建古代天文学的重要内容。现在我们可以运用很多科学仪器对天体进行测量和定位，但是在几千年之前人们是如何运用简单的器具来对天体进行观测呢？《周髀算经》就给了我们一个很好的答案！

## 一、天文测量的基础——术： 商高定理——方圆之术

《周髀算经》开篇就借周公提出了如何来测量天体：“昔者周公问于商高曰：‘窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺立周天历度。夫天不可阶而升，地不可将尺寸而度，请问数安从出。’”<sup>①</sup>商高回答周公测量天体最基本的方法就是方圆之术——即《周髀算经》的商高定理，也就是我们现在所熟知的勾股定理。

古人首先把勾股定理熟练地运用到了大地的测量中，而测量的工具就是矩尺。远古先

民在长期的立杆测影实践中总结出来矩尺测量的使用规律：“偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。”<sup>②</sup>“偃矩、覆矩、卧矩”只是测量对象观测的角度不同，所以立尺的方向不同，但他们所采用的勾股运算方法都是一样的。例如测量高山，就采用偃矩的形式：让矩尺的两个顶点与山顶在同一直线上，然后用步数测量出矩尺底部顶点到山脚的步距，然后根据勾股比例换算出山体的步距高度。同理用覆矩来测量山谷的深度、用卧矩来测量大河等的宽度。

以上这些大地、高山、河流等的测量方法都是用步距来测量出直角三角形的一边边距，然后通过勾股比例换算出另一个直角边边距。因而这种测量方法具有一个限制条件：必须要实际测量出一条直角边的长度，才能来换算另一边。然而对天体的测量我们没法运用步数来测量其中的一边，那又该如何来测量天体的远近和高度呢？这也就是周公所提出的疑问“夫天不可阶而升，地不可将尺寸而度，请问数安从出”。因此天体的测量不光要掌握勾股，还需要一把“量天尺”。

## 二、天体测量的方法：量天尺

荣芳问于陈子，曰：“今者窃闻夫子之道：知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，列星之宿，天地之广袤，夫子之道皆能知之，其信有之乎。”<sup>③</sup>即荣芳问陈子：“你能用勾股的方法来测量宇宙和天体吗？”陈子告诉他：可以的。荣芳虽然也明白勾股运算，但如何将它运用于天体的测量，他却是百思不得其解。这就是上文我们所说的采用勾股比例换算，需要测量出一条直角边，如果不能测量出一条直角边就无法换算出另一直角边或斜边。因此在测量天体时就需要一把“量天尺”，通过“量天尺”测量出一条直角边，然后就可以换算出另外的两条边了。现在我们熟知的丈量天体的天文单位有光年等。那么先秦人们的量天尺是怎么测算出来的呢？陈子曰：“日中立杆测影，此一者，天道之数。周髀长八尺，夏至之日日晷一尺六寸。髀者，股也，正晷者，勾也，正南千里，勾一尺五寸，正北千里，勾一尺七寸，日益表南，晷日益长。”<sup>④</sup>即采用立杆测影的方法，立八尺之表为勾股中的“股”边，表影为勾股中的“勾”<sup>⑤</sup>边。夏至日周地的影长是一尺六寸，那么南距周地一千里的地方影长是一尺五寸，北距周地一千里的地方影长是一尺七寸——也就是我们通常所说的“寸影千里”。而“寸影千里”就是先民在实践日影测量中总结出来的“量天尺”。

### 三、天体宇宙规模的测算：宇宙模型

有了“寸影千里”这把量天尺，天体的测量就很简单了。周地夏至日影长一尺六寸，即“南戴日下”<sup>⑥</sup>，即太阳直射点下到周地的距离就是 16000 里；同理冬至日影长丈三尺五寸，即“南戴日下”，到周地的距离就是 135000 里。

“候勾六尺，……从髀至日下六万里，而髀无影。从此以上至日，则八万里。……”<sup>⑦</sup>等到影长六尺的时候，那么此时“南戴日下”到周地的距离就是 60000 里，因而此时的太阳高度就是 80000 里，“邪至日”<sup>⑧</sup>即周地到太阳的斜边距离就是 100000 里。从这

我们也可以看出即使有了“量天尺”和勾股测量方法，古人也是没法直接测量太阳的高度，一直要等到影长等于六尺的时候，这时影长数据达到勾股比例数值后，才能计算出太阳的高度。

有了“日高”即天高距离后，再根据“周髀长八尺，勾之损益寸千里”的法则，“立表高八尺以望极，其勾一丈三寸。由此观之，则从周北十万三千里而至极下”<sup>⑨</sup>，这样测算出了周地到北极星的距离是 103000 里。

北极星正好处在地球地轴的延长线上，所以在夜晚观察星空会发现群星都围绕着北极星做有规律的圆周运动。因此《周髀算经》中把天体测量的中心定作北极星，一切日月星辰都围着它做圆周运动。这样周地到夏至日的距离加上周地到北极星的距离就是  $16000+103000=119000$  里；周地到冬至日的距离减去周地到夏至日的距离  $135000-16000=119000$  里，即冬至日到夏至日的距离刚好等于夏至日到北极星的距离（参见图一）。

而太阳的运动轨迹是从夏至日点到冬至日点，再从冬至日点到夏至日点，做周而复始的反覆运动。而它俩之间的中点就是春秋分日，间距就是 119000 里的一半即 59500 里。

《周髀算经》说夏至日太阳距北极星的距离是 119000 里，而在半夜太阳就运行到北极星的对面，距离北极星的距离也是 119000 里，这样夏至日的日道轨迹直径就是  $119000+119000=238000$  里，日道轨迹周长是 714000 里（直径乘以 3）。同理春秋分日的日道轨迹直径  $(119000+59500)\times 2=357000$  里，日道轨迹周长 1071000 里；冬至日的日道轨迹直径  $(119000+119000)\times 2=476000$  里，日道轨迹周长 1428000 里。

上述三周日道轨迹，就是早期盖图<sup>⑩</sup>中的内衡、中衡和外衡：夏至日日道就是内衡、春秋分日日道就是中衡，冬至日日道就是外衡。

“春分之日夜分以至秋分之日夜分，极下常有日光。秋分之日夜分以至春分之日

夜分，极下常无日光。故春秋分之日夜分之时，日光所照适极，阴阳之分等也。”<sup>⑩</sup>从春分到秋分能观察到极地是有光的，而从秋分到春分则看不到极地，这个现象说明在春秋分之日，太阳光刚好照射到极地的边缘。于是它说“故曰：日照四旁各十六万七千里”<sup>⑪</sup>。那么这个日光的照射距离是怎么测算出来的呢？

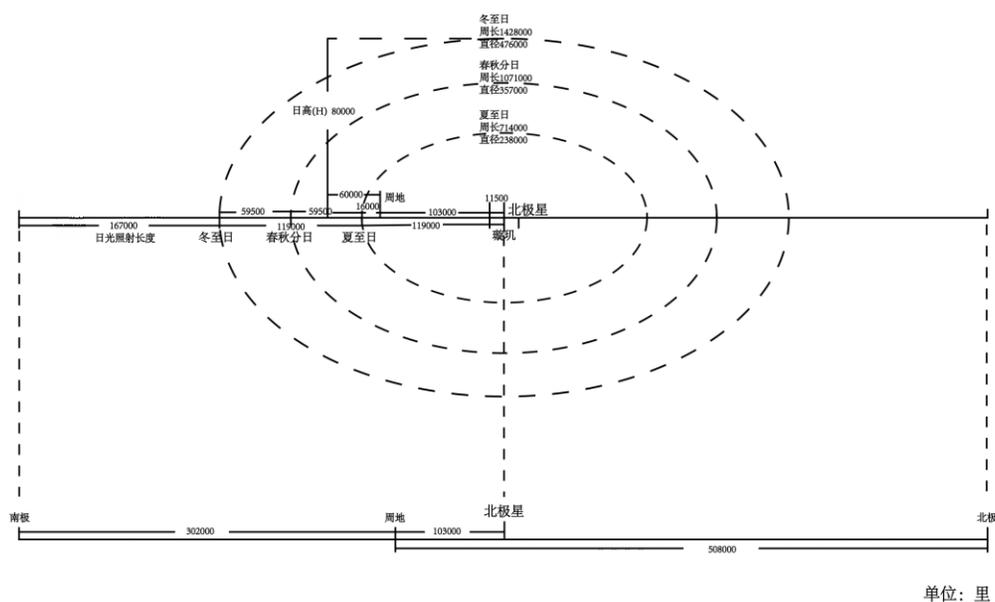
首先要明白什么是极地？这个在《周髀算经》的下卷中有叙述，极地就是北极星周围能产生极昼和极夜现象的区域，也就是“璇玑”。测算“璇玑”的方法《周髀算经》也给出了：“正极为所游，冬至日加酉之时，立八尺表，以绳系表颠，希望北极中天大星，引绳致地而识之；又到旦明，日加卯之时，复引绳希望之，首及绳致地而识其两端，相去二尺三寸，故东西极二万三千里。”<sup>⑫</sup>就是在冬至这天，加酉时（晚上6点）用牵绳法把北极星的星位在地上做个标记，在早上加卯时（早晨6点）再次牵星做标记，两次标记的间距是二尺三寸，即极地的东西直径为23000里，半径就是11500里。璇玑的东西间距就知道了，那么“何以知南北极之时？”<sup>⑬</sup>上述牵星标记的“其两端相去正东西，中折之以指表，正南北”，就是把东西方向的线段对分，对分点与表之间的连线就是正南北方向，然后以“冬至夜半北游所极夜，……以夏至南游所极。……此皆以绳系表

颠而希望之，北极至地所识丈一尺四寸半，……其南极至地所识九尺一寸半”<sup>⑭</sup>就是冬至时的测影距离是114500里，减去周地到北极星的距离103000里，这样北游北距北极星是 $114500-103000=11500$ 里；夏至日测影距离为91500里，周地到北极想距离103000里减去夏至日测影距离，南游南距北极星距离就是 $103000-91500=11500$ 里。南北游距北极星的半径也都是11500里（图二<sup>⑮</sup>）。

上述可知，北极璇玑的半径距离是11500里，而春秋分之日日光刚好照到极地，那么阳光的照射距离就是春秋分日太阳到北极星的距离，减去璇玑半径就是日光的照射距离，即 $178500-11500=167000$ 里。

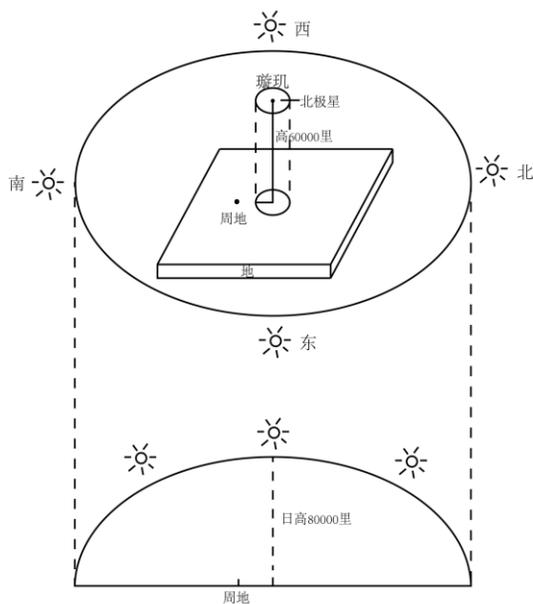
璇玑南北游半径为11500里，这样上文中《周髀算经》计算的周地到北极星的距离是103000里，这个距离既不是夏至日距离，也不是冬至日距离，这个103000里的距离，刚好是夏至日距离和冬至日距离差的中点，也是南北游计算的依据。再按照太阳日轨道夏至日到冬至日的轨道中点看，此时应当为春秋分之日。因此《周髀算经》周地到北极星103000里这个距离，应该是按春秋分之夜北极星的影长距离推算出来的。

《周髀算经》认为阳光所能照射的范围就是宇宙的范围。冬至之日正午太阳到达周地



图一 《周髀算经》宇宙模型范围图





图三 “盖天”模型示意图

的，大地的夜晚只是太阳运行到了北极星的对面，阳光照射不到周地，我们的人眼看不到光，所以此时地处北极星南部的大地就是夜晚时分。因而认为天就像一个覆盖的斗笠。

地为什么是平的呢？一是与我们人眼的观察有关，肉眼观测下的大地大致是一个平整的地面。另外也与立杆测影的测量建模有关，之前我们说古人运用矩尺进行的偃矩、覆矩、卧矩等方法的测量，都是平面测量计算。这种平面测算导致了平面建模观念在立杆测影的天体测量中也遵循这个思维模式（参见图三）。在这种思维下测算建立的大地模型也只能是一个平面的。这个平面是通过平面几何测算构建出来的，它能满足当地对宇宙天体的测量，但不是实际的地球平面。这也是古人“天圆地方”思想的根源所在，并且这种认识一直沿用到明代末年，“明朝末年，传教士进入我国，带来了西方的地球学说，在中国士大夫中引起很大震动。经过认真思考，中国学者逐渐接受了这一学说”<sup>⑨</sup>。

### 五、七衡六间

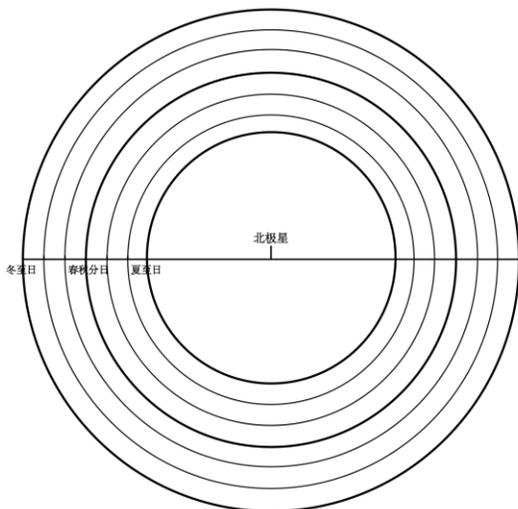
上文我们知道了日道轨迹的内衡、中衡和外衡，分别是夏至日日道轨迹、春秋分日日道轨迹和冬至日日道轨迹。《周髀算经》将夏至日至春秋分日之间、春秋分和冬至日之间

的间距，分别再进行三等分，这样所得的就是七个同心圆圈，并且每两圈之间的间距都相等，这样得到的天体分布图就是“七衡六间”。所以每衡之间的间距就是“是故一衡之间，万九千八百三十三里三分之一”<sup>⑩</sup>。我们用夏至日到春秋分日的太阳间距除以3就可以得到这个数据： $59500 \div 3 = 19833\frac{1}{3}$ 里。同样春秋分日至冬至日的距离除以3也得同样的数据。有了这个间距后，每一衡的周长和直径都可以算出来了。所以《周髀算经》说“内一衡：径二十三万八千里，周七十一万四千里；……次二衡：径二十七万七千六百六十六里二百步，周八十三万三千里；……次七衡：径四十七万六千里，周一百四十二万八千里”<sup>⑪</sup>。

“七衡六间”和“盖天图”的基础都是更古老的两分两至的日影观测。有了两分两至的日影范围，只需要二等分就可以得到三衡图，有了三衡后再分别进行三等分就得到了七衡图（图四）。

### 六、太阳历法

两分两至、“盖天图”和“七衡六间”都是古人通过“立杆测影”对日影的图像尺寸记录，太阳的日道运行是从夏至日到冬至日，然后从冬至日再回到夏至日，这样一个来回就代表一个太阳年。“三衡图”则标记出了夏至



图四 七衡六间图

日、冬至日和春秋分日点,把每年划分成了四个季度;而“七衡图”则把一个完整的太阳运行周期分成了6段,一个来回就是等量的12份;这12份即代表了一年中的12个月,即太阳在“七衡图”中每运行一圈时间就过去了一个月,这样就把每年划分成了12个月。

古人日观太阳又夜观星象,通过长期的观察,发现一岁即一个太阳年的时长为“一岁三百六十五日四分日之一”<sup>②</sup>,如果仅采用太阳年和七衡六间来记录的话,那么每个月的天数是  $365.25 \div 12 = 30.4375$  天。

古人对日观象的记录加上生物生长的规律,又把一年划分成24节气以配合农事劳作。那么我们上面得到的每月(一衡)天数就是两个节气所跨的时间。那么古人如何来测得节气的时刻表呢?这就用到了立杆测影中使用的“圭表系统”中的“圭尺”了,“冬至晷长一丈三尺五寸,夏至晷长一尺六寸”把冬至影长数减去夏至影长数,然后等分成12份就得到了每个节气的节令点,即  $(135 - 16 \text{寸}) \div 12 = 9 \text{寸} 9 \text{又} 1/6 \text{分}$ 。这样“圭尺”上各个节气的尺寸就清楚了:“冬至晷长丈三尺五寸。小寒丈二尺五寸,小分五。大寒丈一尺五寸一分,小分四。……芒种二尺五寸九分,小分一。夏至一尺六寸。小暑二尺五寸九分,小分一。……大雪丈二尺五寸,小分五。”<sup>③</sup>12个刻度往复循环,每一个刻度在来往时各代表一个节气,“圭尺”上每个节气的刻度间距都是相等的。

所以采用了“圭尺”划分后就可以把每年划分成二十四个节令,以此来指导日常的农业生产劳动。

因此,古代出土的“圭尺”的刻度应当是有规律可寻的,以夏至日“一尺六寸”为例,那么此时记录日影的“圭尺”,它的夏至点影长数据就是一尺六寸,冬至点影长就是一丈三尺五寸,春秋分日的影长是夏至日到冬至日尺寸的中点即七尺五寸五分。这样它们之间的比例关系就是 16:75.5:135,有了比例关系,无论我们采用哪种单位长度的直尺进行测量,只要能满足这个比例关系的“圭尺”,就是以夏至日“一尺六寸”为太阳历法的“圭尺”<sup>④</sup>。而《周礼》记载的夏至日“一尺五寸”的地中为洛阳,另据后汉《历志》记载“洛阳冬至一丈三尺”以上两个尺寸为例,满足上述两个条件的“圭尺”的夏至日影长为一尺五寸,冬至日影长为一丈三尺,春秋分日则为七尺二寸五分,比例关系为 15:72.5:130。所以无论何地出土“圭尺”,只要知道当地的夏至日和冬至日影长,就可以求得它们之间的比例,而有了比例后我们就可以用现代的尺度单位来测算。为了便于识别各节气的节点,只需在夏至日到冬至日之间涂以12段等距色块段就可以了。

上述的二分二至即盖天图、“七衡六间”图,乃至“圭尺”,这些都是记录太阳影长或周期活动的节点,通过这些节点产生的历法就

是太阳历法。它们之间是一种逐渐递增细分太阳历法过程的关系。

因此从本质上说“二分二至”是太阳历法的基础,这样的日影观测也最容易取得:只需记录下每年内最短日影和最长日影即可。但能满足夏至日“一尺六寸”、“一尺五寸”这些条件的地点,不是仅有一个地点,而是具有相同纬度的地点都能满足<sup>⑧</sup>。只要有了“二分二至”点,任何古代遗址都会很容易地建立起当地的太阳历法,明白了这些原理后,古代遗址的太阳历法就不再神秘了,就是简单的长期的日影观测记录。

### 七、《周髀算经》中运用的测量规则的误区根源

《周髀算经》中经典的量天尺——寸影千里,在历代都备受关注,也是争论的焦点。

寸影千里产生误区的根源在于古人建立宇宙模型时所采用的平面几何的建构模型,把地面构建成一个统一的大平面,只有在统一的大平面下才能采用勾股定理来测量和测算宇宙。而事实上地球是圆形的,大地平面是个弧形面而不是用几何原理构建出来的平面,因此在实地尤其是大距离的测量上肯定是测不准的,也必定是不准确的。例如后世

《隋书·天文志》对“寸影千里”提出了疑义,而到了唐代,“开元九年(721),天文官几次预测日食不准,玄宗下诏让僧一行(673~727)制订新的历法。……天文学家南宫说等人在河南进行的日影测量工作最为重要。南宫说等在黄河南北选择了几几乎位于同一经线的白马(今河南滑县)、浚仪(今河南开封)、扶沟和上蔡这四个地点,分别测量了其北极出地高度和夏至日影长度”<sup>⑨</sup>。测得的数据如表一。

根据上表的数据,《新唐书·天文志》得出的结论就是“太史监南宫说择河南平地,设水准绳墨植表而以引度之,自滑台始白马,夏至之晷,尺五寸七分。又南百九十八里百七十九步,得浚仪岳台,晷尺五寸三分。又南百六十七里二百八十一里,得扶沟,晷尺四寸四分。又南百六十里百一十步,至上蔡武津,晷尺三寸六分半。大率五百二十六里二百七十步,晷差二寸余。而旧说王畿千里,影差一寸,妄矣”<sup>⑩</sup>。这也是大地大距离实地测量必然会有结果——“寸影千里”是错误的。

因此“寸影千里”的测算只能是在建立几何平面模型后进行的小范围内的测算。这样小范围内的测量,三国时期魏国刘徽在做《九章算术》序时,在洛阳城实地做实验来验证过:他根据“《周官·地官·大司徒》,夏至日中立八尺之表。其景尺有五寸,谓之地中。说云:

表一 历代夏至日影长及纬度

地点	晷长	纬度	备注
白马(滑县)	1.57 尺	35.58	唐代南宫说测得晷长
浚仪(开封)	1.53 尺	34.8	
扶沟	1.44 尺	34.07	
上蔡	1.36 尺	33.27	
周原(岐山县)		34.45	
沔西(咸阳秦都区)		34.35	
安阳(殷都区)		36.12	
登封观星台	1.5348 尺	34.47	元代郭守敬测晷长数据
洛阳		34.62	
陶寺(襄汾县)		35.88	

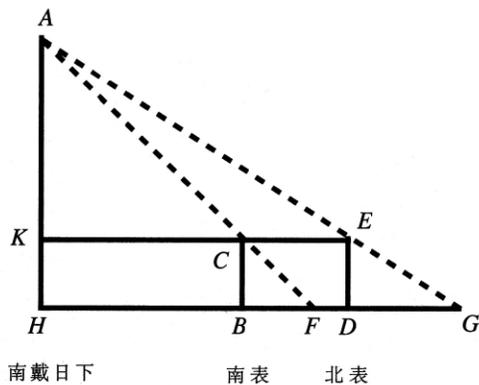
注:纬度都为现县所在地纬度数据

南戴日下万五千里。”<sup>③</sup>并利用《九章算术》中“重差”的方法，“立两表于洛阳之城，令高八尺，南北各尽平地。同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实”，根据他在洛阳城南北立表，根据影差算法总结出一套数学公式(如图五<sup>④</sup>)，根据图中三角关系，这些数学公式我们现在可以用平面几何三角函数进行验算。刘徽洛阳立表测影验证了《周官·大司徒》“景尺有五寸”，也间接验证“地中”的地点是在洛阳。刘徽在洛阳城南北立表距离，现据汉魏洛阳故城遗址南北约4千米，推测其立城南北两表间距约10里，这样产生的影差只有百分之一寸。这个测量范围很小，极易产生测量误差，并且精确度也是不高的，但至少刘徽利用“重差”法验证了洛阳地区“寸影千里”这个观点是准确的。因此无论是夏至日“一尺六寸”还是“一尺五寸”都应该是在极小范围内对日影的测算，这样很容易测得或接近“寸影千里”这个结果。

### 八、夏至日“一尺六寸”影长的起源

上述唐代、元代等各个时代对日影的测量(表一)虽然否认了“寸影千里”的观点，但至少让我们知道：满足夏至日“一尺六寸”、“一尺五寸”地点的大致纬度度数。夏至日“一尺六寸”满足此条件的纬度约为  $35.9^\circ$ ，“一尺五寸”的纬度应稍小于登封的  $34.47^\circ$ 。

夏至日“一尺六寸”的大致纬度知道了，那么我们很容易从地图上找到古代在此纬度附近分布的都市所在。《周髀算经》所说的夏至日“一尺六寸”是周地所测，从表一可知西周时期的周原、沔西遗址的纬度都没有满足这个条件，并且纬度要低太多。而“周族起源于晋南说”<sup>⑤</sup>则大致能满足这个纬度条件，但我们并不知道确定的遗址地点。那么早于西周的商代都城遗址是否满足这一条件呢？殷墟遗址纬度为  $36.12^\circ$  稍微高出一些，如果允许误差的话此地也能大致满足夏至日“一尺六寸”的条件。那么时代更早而且恰好吻合这一纬度的古代都城遗址呢？我们在地图上还真能找到一个——陶寺遗址。陶寺遗址纬度为  $35.88^\circ$ ，刚好处于夏至日“一尺六寸”这个



序图 1

$$\text{日去地} = \frac{\text{表高} \times \text{表间}}{\text{北表景} - \text{南表景}} + \text{表高}$$

$$\text{南表至南戴日下} = \frac{\text{南表景} \times \text{表间}}{\text{北表景} - \text{南表景}}$$

$$\text{人去日} = \sqrt{\text{日去地}^2 + \text{南戴日下}^2}$$

图五 《九章算术》重差法计算公式

纬度上。而“二分二至”的天文记录远在新石器时代就有了记载。陶寺遗址近年的考古新发现——观象台遗址，也从侧面证实陶寺时期的人对于太阳的观测具有多种手段，并且熟练掌握很深奥的天文知识和测量技术；因此测量夏至日“一尺六寸”的源头很有可能就在陶寺时期，并且在此基础上通过平面几何构建出了宇宙模型，并从而形成了上古量天尺“寸影千里”的测量观念。从这个意义上说陶寺遗址是中国古代文明的重要起源点，是形成中国特色哲学思想的起源点。

### 九、地中问题

《周礼·地官·大司徒》“以土圭之法测土深，正日景，以求地中。日南则景短多暑，日北则景长多寒，日东则景夕多风，日西则景朝多阴。日至之景尺有五寸，谓之地中。天地之所合也，四时之所交也，风雨之所会也，阴阳之所和也，然则百物阜安，乃建王国焉，制其畿方千里而封树之”。文中明确指出了地中所具有的特征。

《周礼》相传为周公所著，实际上其成书

年代在两汉之际。而两汉之际正是“盖天说”式微，“浑天说”崛起之时。因此《周礼》的“地中”需从这两大天文观来分别叙述。

(一)“地中”在“盖天说”下理解的话,就不能脱离“盖天”宇宙观——天圆地方的模型。

“日至之景尺有五寸”,“日南则景短多暑,日北则景长多寒”;这三个特征都比较好理解:《周礼》记载的地中是位于夏至日日影一尺五寸的地方,又根据“寸影千里”的量天定律立表愈南,晷影愈短而多暑;立表愈北,则晷影愈长而多寒。而对于“日东则景夕多风,日西则景朝多阴”则较难理解,冯时先生认为“多风、多阴”是立杆测影对天气的需求<sup>③</sup>。然而立杆测影需要一个长期的观察和记录,才能形成一个较为完整的宇宙观。个别的天气条件对立杆的正确与否会有影响,但对长期的观察不构成太大的影响。

从上文“盖天说”可知,在太阳运行到东方的时候,西方是夜晚,反之亦然。这里隐藏了一个认识,即四方的大地在太阳的照射下是轮流有白昼和黑夜的。当夏至日太阳运行到《周礼》记载的“周地”日影到达最短日影时,此时的周地为正午时分。此时在“周地”的东方观测日影会发现日影偏东,在“周地”西方观测日影会发现日影偏西。太阳是自东向西而来,正如前文所述“日在极东,东方日中,西方夜半”,当太阳正午到达周地时,此时周地的正东方就是傍晚了,同时此时周地的正西方就是早晨了。另夏至时节我国大部分地区都会吹东南季风,因此古人认为风从东来,愈东就越接近风口,风会越大。这样“日东则景夕多风”就不难理解了:当“周地”是夏至日正午时,离“周地”愈东的地方则越来越接近傍晚,而且越来越接近风的来处,风也会越大;“日西则景朝多阴”就是离“周地”愈西的地方则越来越接近早晨,天空也越来越阴暗。这其实是一种朴素的“时差”描述方式,只是这种“时差”观念一直没有引起人们足够的重视,一直到元代我国才真正认识到“时差”的存在<sup>④</sup>。

另外,古人在测量日影时发现,每天日出

点的影长和日落点的影长是相等的,这个可以参考上文关于璇玑东西径的测量方法和原理。采用这种方法《周髀算经》算出“夏至之日正东西望,直周东西日下至周五万九千五百九十八里半。冬至之日正东西方不见日,以算求之,日下至周二十一万四千五百五十七里半<sup>⑤</sup>”,夏至日周地到宇宙的东西极边缘距离各约为 59598.5 里,冬至日周地到宇宙的东西极边缘距离各约为 214557.5 里。而当夏至日正午时分太阳到达最短晷影处时,也刚好是一天之中东西径的中点处,这样正午时分“周地”刚好在东西方大地的中轴线上,也就是大地之中的位置,这也是最原始的“地中”概念。

刘绪老师在《西周疆至的考古学考察》<sup>⑥</sup>一文中,通过考古出土的考古遗物资料划分出西周时期的统治疆域图(图六)。

从图六的西周疆域分布看,西周最西地点分布在天水一线,经度约为 105.72°;最东到达潍坊一线,经度约为 119.15°;最北约在北京附近,纬度约为 39.90°;最南延伸到随州—六安一线,纬度约 31.72°—31.77°;而洛阳的经纬度分别约为 112.45°、34.62°。从东西方向上看,洛阳至潍坊经度差约为 7°,洛阳至天水经度差也约为 7°,洛阳刚好位于整个西周疆域的东西正中位置上;而南北方向上,洛阳至北京的纬度差约为 5°,洛阳至随州—六安纬度差约为 3°;根据上文唐代南宮说立杆测影数据看,越往南影差就越大,这样洛阳往南 3°的影长差与洛阳往北 5°的影长差大致会比较接近,如果当时采用立杆测影的话,洛阳也刚好位于西周疆域的南北正中位置上。因此洛阳的影长位置刚好位于西周疆域东西南北的正中心位置处,这正好符合了《周礼》记载的“地中”,也因此而形成了一种“居中而治<sup>⑦</sup>”的思想。因此“地中”的概念,尤其是含有“居中而治”的“地中”是西周以后才形成的观念。

冯时老师在《保训》一文中指出:“周公继承了以嵩山为中心的‘地中’观念,并于嵩山下测影,留下了相关的测影遗迹。”<sup>⑧</sup>这些遗留的“地中”遗迹被后世人们推测在登封观星台一带,因此自周以降多把登封作为“地中”所

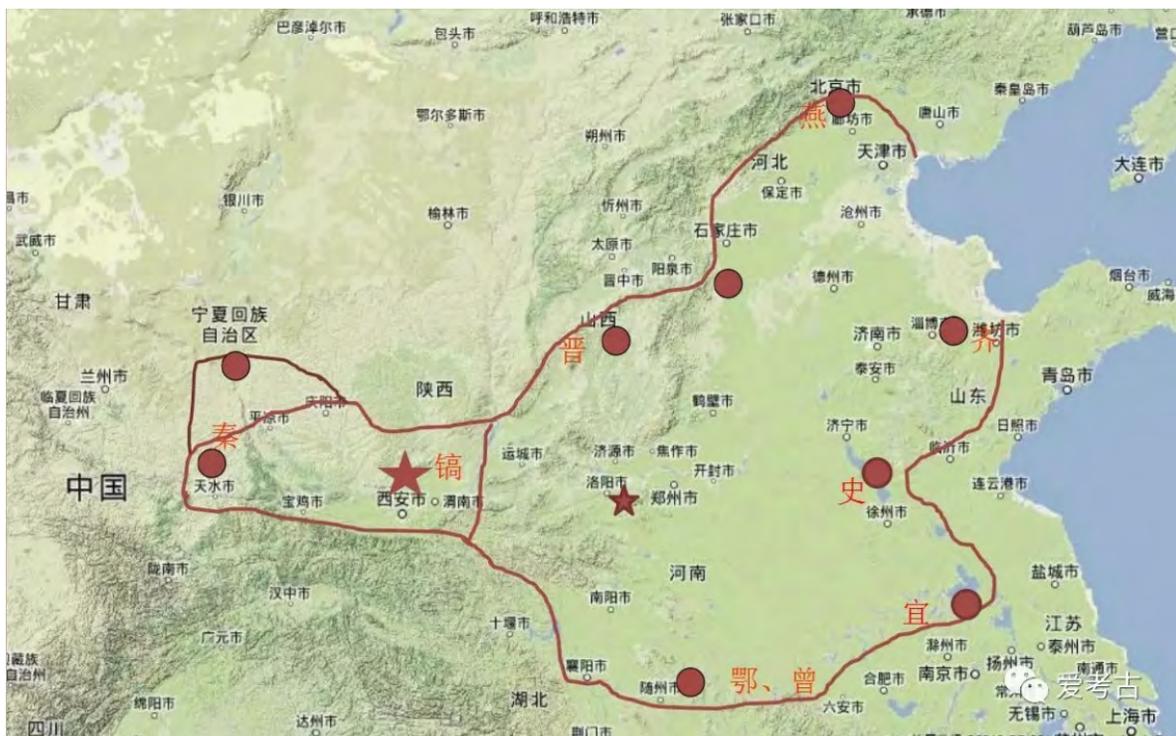
在。而元代郭守敬采用五倍表高测得登封夏至日晷长为 1.5348 尺,《周礼》记载的夏至日“尺有五寸”的观测地点很有可能就是周公在登封一带测定的。

先秦之时,在确定观测日影的地点后,再根据测量数据制定历法,并且也确定了每天的时辰刻度,而每天的时辰刻度与地中的日影观测是配套的,因为不同地点制定的每日时辰是有“时差”存在的。朝代更替后制定时辰的地点往往随着首都的变迁而更改,但是历法制度又往往被沿袭使用,这样就造成了找不准“地中”的情况。南北朝大数学家、天文学家祖暅采用“五表法”来测地中,只要能满足“五表”测影的地方就是“地中”。“五表法”虽然弥补了“时差”造成的差异,但采用“五表法”测得的地中是会随着制定时辰地点的变动而变动的,因此它测得的“地中”并不是一个固定的地点。当然“时差”不易被察觉,这跟我国古代文化分布的地理范围有很大的关系——处于地球的中纬度附近,先秦时期,西端以天水为例,其东经约为 105.72°,东端以青岛、上海一线经度约为 121.4°,经度差约为 15.7°,刚好产生了约 1 小时的“时差”;如果以

传统的中原地区看这个“时差”就更小了。所以历法制定点与时辰制定点的不同造成了“地中”的难测了。例如 2019 年冬至点的时间预报为 2019 年 12 月 22 日 12 点 19 分 18 秒,如果采用祖暅的“五表法”来测,以冬至日 12 点的时间为东经 120°处的制定标准,那么 19 分 18 秒就是制定历法与北京标准时间之间的“时差”,根据东经每一度差 4 分钟计算,  $19.3 \div 4 = 4.825$  (度),  $120 - 4.825 = 115.175^\circ$ ,那么我们把“五表”立在东经 115.175°的地方,这个经度大致就在北京稍偏西处,再加上影长尺寸数所在的纬度位置就可以测得“地中”的位置了。因此采用“五表法”每年我们测得的“地中”都是不同的。

(二)“地中”在“浑天说”中又是如何定义的呢?<sup>⑫</sup>

首先我们得了解“浑天说”中宇宙的模式。“浑天说”认为宇宙是“天如鸡卵,地如鸡黄”,其宇宙模型类似于西方的“地心说”,只是“浑天说”中大地位于宇宙的中心附近,并不停转动。“浑天说”主要采用两个参照体系:一是太阳转动的轨道即黄道,二是大地转动的轨道(赤道),认为“天左旋(公转),地右动



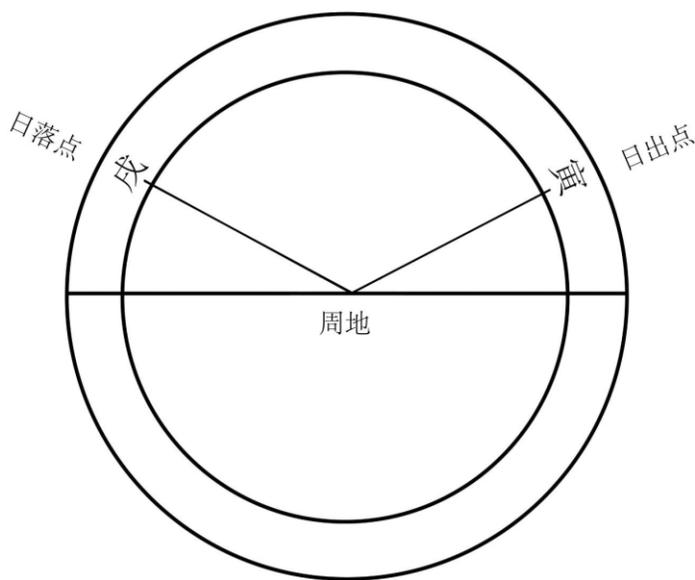
图六 西周王朝的统治疆域(约公元前 11—前 8 世纪)

(自转)”<sup>④</sup>。“浑天说”下宇宙的范围是如何测量的? <sup>⑤</sup>其测量规则与《周髀算经》相同,都是“寸影千里”,宇宙的形状概念仍然是“天圆地方”。宇宙范围的测量以春秋分大地与黄道相平行时为准:二十八宿周天之数为“百七万一千里,……直径三十五万七千里(作者注:此周天数和直径与《周髀算经》春秋分日日道直径和周长是相等的)”,而二十八宿距离宇宙四游之极“上下东西各有万五千里”。这样的宇宙就像一个圆球,它的球直径为387000里,大地居于天球的中间。而大地在天球的中心附近不停地转动,“春分之日,地与星辰复本位。至夏至之日,地与星辰东南游万五千里,下降亦然。至秋分,还复正。至冬至,地与星辰西北游亦万五千里,上升亦然。至春分,还复正。进退不过三万里,故云‘地与星辰四游,升降于三万里之中’。是以半之,得地之中也。”<sup>⑥</sup>即夏至日大地转到黄道下方15000里处,然后开始往上转,至冬至日转到黄道上方15000里处,再开始往下转;而春秋分日,刚好与黄道平。因此“浑天说”认为大地转动的南北厚度为30000里,这样大地的一半刚好是15000里(即赤道与黄道的交叉点)。这样的大地转动模式形成了“地陷东南,天倾西北”的传统文化认识。

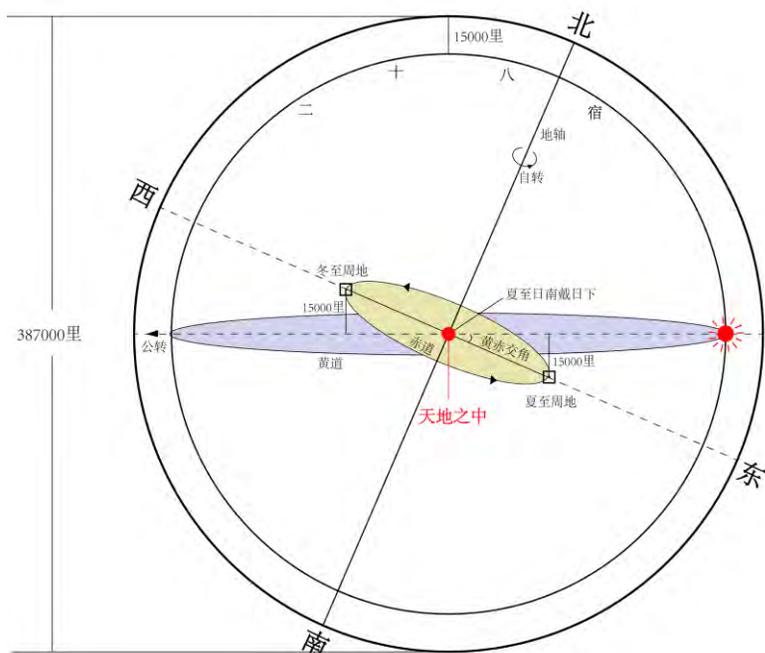
另外夏至日太阳从东北角“寅”位升起、“戌”位落下(图七),因此太阳的位置是位于地平线上方的(北方)。《周礼·地官·大司徒》“……日至之景尺有五寸,谓之地中。天地之所合也,四时之所交也,风雨之所会也,阴阳之所和也,……”“日至之景尺有五寸,谓之地中”。从“浑天说”的宇宙动态变化看,“景尺有五寸,谓之地中”是夏至日“南戴日下”到达周地的距离是15000里,此时的“南戴日下”刚好位于浑天观下大地南北转动厚度30000里的一半处,即为“地中”,而这个点就是黄赤交角的交叉点,因此它不但是“地中”,也是宇宙的中心。所以才会说此地为“天地之所合也,四时之所交也,风雨之所会也,阴阳之所和也,……”这个太阳直射点下的地方,正是“地中”“天中”的重合之地,是“浑天”宇宙观的“天地之中”所在(图八)。

从“盖天说”宇宙模型看,宇宙的中心只能是天中,大地位于中天10万余里之外,因而产生不了“天中”“地中”的重合点。所以从“地中”为“天地之中”这个角度理解的话,它是“浑天”宇宙观下的概念。因此《周礼》最终成书时很可能是出于两汉之际的“浑天派”之手。

了解了“浑天说”关于“地中”的概念后,



图七 周地夏至日日出日落点示意图



图八 “浑天说”宇宙模型和地中位置示意图

我们就知道为什么历代把洛阳作为“景尺有五寸”的地中所在了,人们把“景尺有五寸”理解成产生“一尺五寸”影长的所在地了。而“一尺五寸”影长所在地和“五表法”,都是“盖天说”下测量太阳影长的概念和方法。那么用“盖天说”的概念和方法去寻求“浑天说”的地中,也只能是“张冠李戴”了。从而有了洛阳“一尺五寸”的“地中”概念,因此自汉以降又多把登封作为测量“地中”的所在,进而形成了以嵩山为“天地之中”的传统文化观念。

那么我们再回到先秦天文观,什么是“居中而治”呢?“帝御斗车而挚四方”即居住在璇玑的天帝通过斗车(北斗七星)来执掌四方(天下),而璇玑则位于天之中央,这就是天帝的“居中而治”。春秋战国时期人们把天上的星宿等星空位置与地上的九州和城市建立起对应的“分野”<sup>⑥</sup>关系。“地中”则对应了“天中”,“天中”是天帝居住的地方,那么“地中”就应该为“人王”居住的最理想地了。因此“居地中而治”成为了之后皇权的重要核心思想之一。

## 十、结语

《周髀算经》记载的天文现象观测非常细

致,用词也相当精准。书的内容从大地测量原理开始介绍,逐步构建出了宇宙模型,然后用术——勾股算之,先制定了太阳历法,太阳历法的每月是30.4375天,这样的记日方式很不好计算。它又根据先民对夜晚星空天体的观察,逐步掌握月亮运行的规律,并制定了以“朔望”为基础的月亮历法。太阳历法和月亮历法并行使用,也就是我们现在俗称的“阴阳合历”。而“阴阳合历”在使用时是有“岁差”的,尤其是长时间的使用就会产生出误差,使得观测的日月运行位置与历法产生了冲突,因此每隔一些朝代后就有对历法的重新修订。《周髀算经》记载的“夏至日一尺六寸”的天文历法在时代上要相对早些,而《周礼·地官·大司徒》记载的“夏至日一尺五寸”的天文历法很可能是周公营洛邑后,在“一尺六寸”古历法的基础上重新修订的。

《周髀算经》记载的天文现象反映出古人“观测唯勤,探微唯精”的实践观测和记录;尤其是对天文现象的观察和记载延绵几千年,“日行天七十六周,月行天千一十六周,及合于建星”<sup>⑦</sup>,没有长时间的连续观测和记载是无法做到这样精准的天体测量和历法计算的。因此《周髀算经》中整套完整的天文历法

的制定和计算, 需要有大致以下几方面的积累: 第一就是上述长时间的天文观测和记录, 天文观测不仅有太阳运行规律的观察和影长数据的记录, 也包含夜晚星空周天星辰位置的运行规律和月亮运行周期之间的关系。第二是数学运算的成熟, 不仅是代数的四则运算, 还有长期土地使用中平面几何的计算, 尤其是勾股定理的验证和在实际测量中的运用。第三是以《夏小正》、《礼记·月令》等为代表的物候学的长期观测和记录, 为之后历法中二十四节气的划分打下了坚实的基础。另外还有以《周易》为代表的思想哲学体系也与古代天文有着密切的联系。只有当上述各方面知识的积累达到一定的量后, 才能建立起一部完整的精确的天文历法。

从世界范围看, 在公元前三世纪古希腊天文学家埃拉托色尼 (Eratosthenes, 公元前 276—前 194), 在埃及发现太阳光在赛伊城 (今阿斯旺地区) 可以直射入水井内, 而在亚历山大城的教堂顶部照射进的光线有  $7.2^\circ$  的照射角, 他又根据这两地的大地实际距离, 计算出地球是个半径约 6340 千米的球形 (这个数据跟现在测定的地球半径基本相同)。因此西方的地球观多受此影响, 而我国的地球观一直是“天圆地方”的观点。地球观的不同孕育了不同的东西方天文宇宙观。因此在面对同样的自然客观认识时, 在解释客观世界时也就产生偏差, 例如阴阳 (生死)、五行 (五气) 等的自然认识, 这些自然认识归根结底都要用来解释天文宇宙观。因而东西方不同的天文宇宙观也是东西方思想文化差异产生的重要原因之一。在东方, 从立杆测影开始, 就奠定了东方文化特有的基调。

“天文学不仅是古代科学的渊藪, 同时也是古代文明的渊藪。”<sup>⑧</sup> 先秦天文学不仅仅是对古代农业的指导和祭祀占卜对星象的筮占, 它也是古代文明中科学技术和独特思想文化形成的主要发源地。所以《周髀算经》不仅仅是一部数学算书, 也是一部先秦天文之书, 是先民对宇宙的一种宏观认识, 它对宇宙的宏观构建, 使得“天圆地方”思想在中国延绵了几千年之久; 而从“地中”演变成的“居中

而治”的思想, 自周以降都是帝王思想的重要组成部分; 从晷长变化代表的“阴阳”、极盛而衰、否极泰来等阴阳转变现象, 对后世的“阴阳学派”、道家学说等中国独特的思想文化也产生了巨大的影响和推动。

“如果我们懂得了古代人类的宇宙观, 其实我们就已经在一定程度上把握了文明诞生和发展的脉络”<sup>⑨</sup>, 中华文明孕育了独特的中国思想文化和哲学伦理; 中国传统文化中“天文到人文”“天人合一”“君权天授”等思想都与先秦古人的天文观有着千丝万缕的联系和渊藪。现今“中华文明探源工程”不仅仅是考古学意义上对文明和国家起源的探源, 也应是独特文化起源的探源。而天文考古学正是古代文明探源的重要手段和方法, 尤其是在中国独特的思想文化起源上具有不可替代的作用。

附记: 从 2017 年开始学习《周髀算经》起, 虽历时三年多, 但由于刚刚涉足古代天文学, 很多天文学知识现今依旧缺乏, 古代天文学文献也仅仅是开了个头, 仍有大量的文献需要去阅读和理解。因此此篇文章写作的角度很多都是从《周髀算经》形成的“盖天”宇宙观来解释的, 在写作期间, 经常是在读了新文献后, 就一改再改, 现在在天文学的知识和结构体系上仍缺乏得太多, 因此文中的欠缺还望大家多多批评指正和包涵。在写作期间得到了何弩、冯时、严志斌、周广明、李新伟等老师的指点和帮助; 日常与陈国梁、宋江宁等同事的讨论中也得到了颇多启发和灵感; 另外偃师商城队史萌萌女士帮忙绘制电子版插图, 在这里一并表示感谢!

注释:

① (汉)张苍著,曾海龙译解:《九章算术》,第 276 页,重庆大学出版社,2006 年。

② (汉)张苍著,曾海龙译解:《九章算术》,第 278 页,重庆大学出版社,2006 年。

③ (汉)张苍著,曾海龙译解:《九章算术》,第 283 页,重庆大学出版社,2006 年。

④⑦ (汉)张苍著,曾海龙译解:《九章算术》,第 286 页,重庆大学出版社,2006 年。

⑤ 作者注:“勾, 圈套也”, 勾就是圆的周圈, 而《周髀算经》等先秦时期通常采用的圆周率就是 3, 因

此勾本身就是一个名词也是一个代表3的量词；“股”也可做量词，但股是否是代表4的量词，已不可考。从勾股定义勾三股四来看，勾股都应当有特定数量值的含义。

⑥南戴日下：刘徽《九章算术》序“《周官·大司徒职》，夏至日中立八尺之表。其景尺有五寸，谓之地中。说云：南戴日下万五千里”，南戴日就是周地南方太阳直射下的地点。（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第1页，重庆大学出版社，2006年。

⑧“邪至日”即周地到太阳的直线距离。（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第287页，重庆大学出版社，2006年。

⑨（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第289页，重庆大学出版社，2006年。

⑩⑪⑫冯时：《天文考古学与上古宇宙观》，《濮阳职业技术学院学报》2010年8月第23卷第4期。

⑬⑭（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第293页，重庆大学出版社，2006年。

⑮⑯（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第287页，重庆大学出版社，2006年。

⑰引用《九章算术》北极璇玑测算示意图。（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第207页，重庆大学出版社，2006年。

⑱⑲（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第295页，重庆大学出版社，2006年。

⑳（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第304页，重庆大学出版社，2006年。

㉑（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第305页，重庆大学出版社，2006年。

㉒（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第301页，重庆大学出版社，2006年。

㉓⑳㉔（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第298页，重庆大学出版社，2006年。

㉕（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第304页，重庆大学出版社，2006年。

㉖㉗关增建：《中国天文学史上的地中概念》，《自然科学史研究》2000年第19卷第3期。

㉘（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第299~300页，重庆大学出版社，2006年。

㉙（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第316页，重庆大学出版社，2006年。

㉚何弩：《山西襄汾陶寺城址中期王级大墓 I-IM22 出土漆杆“圭尺”功能试探》，《自然科学史研究》2009年第28卷第3期。何弩老师计算的春秋分影长为5.67陶寺尺。而实际上陶寺所处纬度的春秋分影长应当为七尺五寸五分（7.55陶寺尺）。从这个

角度看，陶寺 M22 出土的漆杆应当不具备“圭尺”的功能。

㉛关增建：《中国天文大地测量的历史演变》，《自然科学研究史》2018年第37卷第4期。第425页提出过“满足‘日至之影，尺有五寸’这一条件的，是一条纬度线”。

㉜（宋）欧阳修、宋祁：《新唐书》，第813页，中华书局，1975年。

㉝（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第1页，重庆大学出版社，2006年。

㉞图片引用于《九章算术》。（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第5页，重庆大学出版社，2006年。

㉟持有周族起源于晋南说观点的先生有钱穆、邹衡、王玉哲等先生。

㊱⑳㊲冯时：《〈保训〉故事与地中之变迁》，《考古学报》2015年第2期。

㊳关增建：《中国天文大地测量的历史演变》，《自然科学研究史》2018年第37卷第4期。

㊴参见《九章算术》，周地东西径的测量。（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第295页，重庆大学出版社，2006年。

㊵刘绪：《西周疆至的考古学考察》，《青铜器与金文》（第一辑），上海古籍出版社，2017年。

㊶笔者注：《周髀算经》中的天文历法都是“盖天说”下形成的，“浑天说”这里就简单说下产生地中的位置。

㊷（清）孙星衍：《十三经清人注疏·尚书今古文注疏》，第5页，《中华书局》，1986年。

㊸“浑天说”宇宙范围：依据《尚书考灵耀》东汉郑玄注，以太阳黄道0°即春分日测算二十八宿的距离，加上上下东西各万五千里为宇宙的四游之极。作者注：郑玄注中没有涉及太阳的位置，故在“浑天”宇宙模型中把太阳位置与二十八宿处于同一个天球位置上。（清）孙星衍：《十三经清人注疏·尚书今古文注疏》，第6页，《中华书局》，1986年。

㊹（清）孙星衍：《十三经清人注疏·尚书今古文注疏》，第6页，《中华书局》，1986年。

㊺王力主编：《中国古代文化常识》（第4版），第16~21页，北京联合出版公司，2014年。

㊻（汉）张苍著，曾海龙译解：《九章算术》，第324页，重庆大学出版社，2006年。

（责任编辑：周广明）